1	2	3	4
B	B	B	B

CALIF.
A

APELLIDO Y NOMBRE:
LIBRETA:

TURNO: ☒ Ma-Vi 10-13hs ☐ Ma-Vi 16-19hs

Álgebra Lineal - 1° Cuatrimestre 2017
1° Parcial (16/05/2017)

1. Sea el K-espacio vectorial $V = \mathbb{C}^{2\times 2}$ y el subconjunto $S = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : A = \overline{A^t}\}$.
   a) Para $K = \mathbb{R}$:
      i) Probar que S es un subespacio de V. Indicar una base y la dimensión de S.
      ii) Hallar un subespacio vectorial T de V tal que $S \oplus T = V$.
   b) Para $K = \mathbb{C}$, ¿es S un subespacio vectorial de V? Justificar.

2. Sean φ_1, φ_2 y $\varphi_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ las siguientes formas lineales:
$$\varphi_1(x,y,z) = x - y + z, \qquad \varphi_2(x,y,z) = y - z, \qquad \varphi_3(x,y,z) = x - y.$$
   a) Sea la base $B_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B^* = B_1$.
   b) Sea $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$. Hallar una base de W°. Calcular $[\Phi]_{B^*}$ para cada Φ en la base de W°.

3. Sea $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por:
$$f(1) = (1,1,0,1),\ f(X) = (0,-1,1,-1),\ f(X^2) = (0,1,0,5),\ f(X^3) = (0,-1,0,-5).$$
   a) Hallar una base y la dimensión de $\mathrm{Nu}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   b) Hallar bases B y B' de $\mathbb{R}_3[X]$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, tal que $|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   c) ¿Existen bases B_1 y B_2 tales que $|f|_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

4. Consideremos en $\mathbb{R}[X]$ el producto interno definido por $\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(X)q(X)dX$.
Sean $S = \{p \in \mathbb{R}[X] : gr(p) \leq 2 \text{ o } p = 0\}$ y $q = X^7 - X$.
   a) Hallar una base ortonormal de S.
   b) Hallar el polinomio de grado menor o igual a 2 más cercano a q.
   c) Calcular la distancia de q a $S^\perp$.

Complete esta hoja con sus datos y entréguela con el resto del examen

PARCIAL - HOJA 1

1) a) i) Como S es un subconjunto del $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^{2\times 2}$ y ya sabemos que $\mathbb{C}^{2\times 2}$ con las operaciones $+_{\mathbb{C}^{2\times 2}}$ y $\cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}}$ cumple las propiedades de un e.v., alcanza con probar que

$\cdot$) $0_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \in S$

$\cdot\cdot$) $A, B \in S \Rightarrow A +_{\mathbb{C}^{2\times 2}} B \in S$

$\cdot\cdot\cdot$) $A \in S,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}} A \in S$.

$\cdot$) $0_{\mathbb{C}^{2\times 2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. qvq $0 = \overline{0}^t$.

$$\overline{0}^t = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \in S.$$

$\cdot\cdot$) Sean $A, B \in S$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. qvq $A \underset{\mathbb{C}^{2\times 2}}{+} B \in S$, es decir

$$A + B = \overline{(A+B)}^t.$$

$$A \in S \Leftrightarrow A = \bar{A}^t = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix},\quad B \in S \Leftrightarrow B = \bar{B}^t = \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} & \bar{b}_{21} \\ \bar{b}_{12} & \bar{b}_{22} \end{bmatrix}.$$

$$\cancel{A +_{\mathbb{C}^{2\times 2}} B \overset{\text{def. de } +_{\mathbb{C}^{2\times 2}}}{=} \begin{bmatrix} a_{11} +_{\mathbb{R}} b_{11} & a_{12} +_{\mathbb{R}} b_{12} \\ a_{21} +_{\mathbb{R}} b_{21} & a_{22} +_{\mathbb{R}} b_{22} \end{bmatrix} =}$$

$$A +_{\mathbb{C}^{2\times 2}} B \overset{A,B\in S}{=} \bar{A}^t +_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \bar{B}^t \overset{\text{def. de } +_{\mathbb{C}^{2\times 2}}}{=} \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} +_{\mathbb{R}} \bar{b}_{11} & \bar{a}_{21} +_{\mathbb{R}} \bar{b}_{21} \\ \bar{a}_{12} +_{\mathbb{R}} \bar{b}_{12} & \bar{a}_{22} +_{\mathbb{R}} \bar{b}_{22} \end{bmatrix} \overset{\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}}{=} \begin{bmatrix} \overline{(a_{11} +_{\mathbb{R}} b_{11})} & \overline{(a_{21} +_{\mathbb{R}} b_{21})} \\ \overline{(a_{12} +_{\mathbb{R}} b_{12})} & \overline{(a_{22} +_{\mathbb{R}} b_{22})} \end{bmatrix} \overset{\text{def. de } A^t}{=}$$

$$= \begin{bmatrix} \overline{(a_{11} +_{\mathbb{R}} b_{11})} & \overline{(a_{12} +_{\mathbb{R}} b_{12})} \\ \overline{(a_{21} +_{\mathbb{R}} b_{21})} & \overline{(a_{22} +_{\mathbb{R}} b_{22})} \end{bmatrix}^t \underset{\text{def. de } +_{\mathbb{C}^{2\times 2}}}{=} \overline{(A +_{\mathbb{C}^{2\times 2}} B)}^t$$

$\therefore A + B \in S$.

$\cdot\cdot\cdot$) Sean $A \in S$, $\lambda \in \mathbb{R}$. qvq $\lambda \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}} A \in S$, es decir $\lambda A = \overline{(\lambda A)}^t$.

$$\lambda \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}} A \overset{A \in S}{=} \lambda \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}} \bar{A}^t \underset{\text{def. de } \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}}}{=} \begin{bmatrix} \lambda \cdot_{\mathbb{R}} \bar{a}_{11} & \lambda \cdot_{\mathbb{R}} \bar{a}_{21} \\ \lambda \cdot_{\mathbb{R}} \bar{a}_{12} & \lambda \cdot_{\mathbb{R}} \bar{a}_{22} \end{bmatrix} \underset{\text{si } k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot \bar{z} = \overline{k \cdot z}}{=} \begin{bmatrix} \overline{(\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{11})} & \overline{(\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{21})} \\ \overline{(\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{12})} & \overline{(\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{22})} \end{bmatrix} =$$

Continúa en la carilla siguiente

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de } A^t}}{=} \begin{bmatrix} (\overline{\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{11}}) & (\overline{\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{12}}) \\ (\overline{\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{21}}) & (\overline{\lambda \cdot_{\mathbb{R}} a_{22}}) \end{bmatrix}^t \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def. de } \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}}}}{=} (\overline{\lambda \cdot_{\mathbb{C}^{2\times 2}} A})^t$$

$\therefore \lambda A \in S$.

Valen .), ..) y ...) $\Rightarrow$ S es un subespacio de $\mathbb{V}$.

Ahora busco una base de S:

$A \in S \Rightarrow A = \bar{A}^t \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$ Si llamo $\alpha_{kj} + \beta_{kj} i$ a a_{kj}:

$\overline{a+bi} = a - bi$

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \beta_{11} i = \alpha_{11} - \beta_{11} i \iff 2\beta_{11} i = 0 \iff \underline{\beta_{11} = 0} \quad (2 \neq 0_{\mathbb{C}},\ i \neq 0_{\mathbb{C}}) \\ \alpha_{12} + \beta_{12} i = \alpha_{21} - \beta_{21} i \quad (1) \\ \alpha_{21} + \beta_{21} i = \alpha_{12} - \beta_{12} i \quad (2) \\ \alpha_{22} + \beta_{22} i = \alpha_{22} - \beta_{22} i \iff 2\beta_{22} = 0 \iff \underline{\beta_{22} = 0} \end{cases}$$

(1) - (2): $\cancel{\alpha_{12}} + \beta_{12} i - (\cancel{\alpha_{12}} - \beta_{12} i) = \cancel{\alpha_{21}} + \beta_{21} i - (\cancel{\alpha_{21}} - \beta_{21} i) \iff 2\beta_{12} i = 2\beta_{21} i$

$\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \neq 0_{\mathbb{C}},\ i \neq 0_{\mathbb{C}}}}{\iff} \underline{\beta_{12} = \beta_{21}}$

(1) + (2): $\alpha_{12} + \cancel{\beta_{12} i} + \alpha_{12} - \cancel{\beta_{12} i} = \alpha_{21} + \cancel{\beta_{21} i} + \alpha_{21} - \cancel{\beta_{21} i} \iff 2\alpha_{12} = 2\alpha_{21}$

$\underset{\substack{\downarrow \\ 2 \neq 0_{\mathbb{C}}}}{\iff} \underline{\alpha_{12} = \alpha_{21}}$

Entonces ~~$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} \\ \alpha_{12} + \beta_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$~~ $A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} + \beta_{12} i \\ & \end{bmatrix}$

Continúa en la hoja siguiente

PARCIAL - HOJA 2

Ahora busco una base de S:

$A \in \mathbb{C}^{2\times 2} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} i & \alpha_{12} + \beta_{12} i \\ \alpha_{21} + \beta_{21} i & \alpha_{11} + \beta_{22} i \end{bmatrix}$

$A \in S \iff \begin{bmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} i & \alpha_{12} + \beta_{12} i \\ \alpha_{21} + \beta_{21} i & \alpha_{22} + \beta_{22} i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} - \beta_{11} i & \alpha_{21} - \beta_{21} i \\ \alpha_{12} - \beta_{12} i & \alpha_{22} - \beta_{22} i \end{bmatrix} \iff$

$2 \neq 0_{\mathbb{C}},\ i \neq 0_{\mathbb{C}}$

$\iff \begin{cases} \alpha_{11} + \beta_{11} i - \alpha_{11} + \beta_{11} i = 0 \iff 2\beta_{11} i = 0 \iff \underline{\beta_{11} = 0} \\ \alpha_{12} + \beta_{12} i - \alpha_{21} + \beta_{21} i = 0 \quad (1) \\ \alpha_{21} + \beta_{21} i - \alpha_{12} + \beta_{12} i = 0 \quad (2) \\ \alpha_{22} + \beta_{22} i - \alpha_{22} + \beta_{22} i = 0 \iff 2\beta_{22} i = 0 \iff \underline{\beta_{22} = 0} \end{cases}$

$2 \neq 0_{\mathbb{C}},\ i \neq 0_{\mathbb{C}}$

• $(1)+(2)$: $(\cancel{\alpha_{12}} + \beta_{12} i - \cancel{\alpha_{21}} + \beta_{21} i) + (\cancel{\alpha_{21}} + \beta_{21} i - \cancel{\alpha_{12}} + \beta_{12} i) = 0 \iff$

$\iff 2\beta_{12} i + 2\beta_{21} i = 0 \iff 2\beta_{12} i = -2\beta_{21} i \iff \underline{\beta_{12} = -\beta_{21}}$

$2 \neq 0_{\mathbb{C}},\ i \neq 0_{\mathbb{C}}$

• $(1)-(2)$: $(\alpha_{12} + \cancel{\beta_{12} i} - \alpha_{21} + \cancel{\beta_{21} i}) - (\alpha_{21} + \cancel{\beta_{21} i} - \alpha_{12} + \cancel{\beta_{12} i}) = 0 \iff$

$\iff 2\alpha_{12} - 2\alpha_{21} = 0 \iff 2\alpha_{12} = 2\alpha_{21} \iff \underline{\alpha_{12} = \alpha_{21}}$

$2 \neq 0_{\mathbb{C}}$

$\therefore A \in S \iff A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} - \beta_{21} i \\ \alpha_{21} + \beta_{21} i & \alpha_{22} \end{bmatrix} \iff$

$\iff A = \alpha_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{21} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta_{21} \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \alpha_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Esto me dice que esas cuatro matrices generan S, ya que cualquier elemento es c.l. de ellas. Para ver que son una base de S hay que probar que son l.i.

Voy a usar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto l.i. si

$\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_n v_n = 0 \Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_n = 0$.

Continúa en la carilla siguiente

$\gamma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \gamma_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff$

$\iff \begin{cases} \gamma_1 \cdot 1 = 0 & \iff \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 \cdot 1 - \gamma_3 \cdot i = 0 & \iff \gamma_2 = 0 \wedge \gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 \cdot 1 + \gamma_3 \cdot i = 0 & \\ \gamma_4 \cdot 1 = 0 & \iff \gamma_4 = 0 \end{cases}$ (ec. con complejos, igualo parte real y parte imaginaria, ambas son 0)

$\therefore \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de S.

$\Rightarrow \dim(S) = 4$ (la cantidad de elementos de cualquier base).

ii) Busco $T \subseteq \mathbb{V}$ / $S \oplus T = \mathbb{V}$.

$S \oplus T = \mathbb{V}$ sii:

·) $S \cap T = \{0\}$.

··) $S + T = \mathbb{V}$.

Por el teorema de la dimensión de la suma de subespacios, tenemos

$\underbrace{\dim(S)}_{=4} + \dim(T) - \underbrace{\dim(S \cap T)}_{=0 \text{ porque } \dim(\{0\})=0} = \underbrace{\dim(\mathbb{V})}_{=8 \text{ porque } \dim(\mathbb{C}^{2\times 2}) \overset{\text{como } \mathbb{R}\text{-e.v.}}{=} 2 \cdot \dim(\mathbb{C}^{2\times 2}) \overset{\text{como } \mathbb{C}\text{-e.v}}{=} 2 \cdot 4 \ (*)}$

(*) Vimos que en general vale que para cualquier $\mathbb{C}$-e.v. de dim. finita n, su dim. como $\mathbb{R}$-e.v. es $2n$.

Entonces $\dim(T) = 8 - 4 = 4$

Necesito 4 elementos l.i. entre sí y que no pertenezcan a S (de lo contrario $S \cap T \neq \{0\}$ y no vale $S \oplus T$) para armar una base de T.

$\left\{ \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ cumple. Veamos que es un cjto. l.i.:

$\gamma_1 \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \gamma_3 \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \gamma_1 i = 0 \iff \gamma_1 = 0 \\ \gamma_2 i = 0 \iff \gamma_2 = 0 \\ \gamma_3 i = 0 \iff \gamma_3 = 0 \\ \gamma_4 1 = 0 \iff \gamma_4 = 0 \end{cases}$

Por el teorema de la dimensión, para ver que su intersección es $\{0\}$ alcanza con ver que $S + T = \mathbb{C}^{2\times 2}$, ya que

$\dim(S \cap T) = \underbrace{\dim(S)}_{=4} + \underbrace{\dim(T)}_{=4 \text{ porque ya dimos esa base}} - \underbrace{\dim(\mathbb{C}^{2\times 2})}_{=8} = 0$

Continúa en la hoja siguiente

PARCIAL - HOJA 3

Veamos que los elementos de las dos bases son l.i. entre sí (como son 8 en total, con esto probaríamos que la unión de las dos bases genera $\mathbb{C}^{2\times 2}$, que es un $\mathbb{R}$-e.v. de dim. 8) ($\star$):

$$\gamma_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\gamma_2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+\gamma_3\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}+\gamma_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\gamma_5\begin{bmatrix}i&0\\0&0\end{bmatrix}+\gamma_6\begin{bmatrix}0&0\\0&i\end{bmatrix}+\gamma_7\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix}+\gamma_8\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$\iff$ ~~$\gamma_1\cdot 1+\gamma_5\cdot i=0 \iff \gamma_1=\gamma_5=0$~~

~~$\gamma_2\cdot 1-\gamma_3 i+\gamma_7 i=0 \Rightarrow \gamma_7=0$~~ ~~$\gamma_2=\gamma_3=0$ ec. de abajo~~

~~$\gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot i=0 \iff \gamma_2=\gamma_3=0$~~

~~$\gamma_4\cdot 1+$~~

$$\begin{cases}\gamma_1\cdot 1+\gamma_5\cdot i=0 \Rightarrow \gamma_1=\gamma_5=0\\ \gamma_2\cdot 1-\gamma_3\cdot i+\gamma_7\cdot i=0 \Rightarrow \gamma_2=0 \text{ y } (\gamma_7-\gamma_3)=0 \Rightarrow \gamma_7=0 \quad \gamma_3=0,\ \text{ec. siguiente}\\ \gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot i+\gamma_8\cdot 1=0 \Rightarrow \gamma_8+\gamma_3 i=0 \Rightarrow \gamma_8=\gamma_3=0 \quad \gamma_2=0,\ \text{ec. anterior}\\ \gamma_4\cdot 1+\gamma_6\cdot i=0 \Rightarrow \gamma_4=\gamma_6=0\end{cases}$$

$\therefore \gamma_1=\ldots=\gamma_8=0 \Rightarrow$ los elementos son l.i. $\Rightarrow$ son base $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ generan $\mathbb{C}^{2\times 2} \Rightarrow S\cap T=\{0\}$.

$$\therefore T=\left\langle\begin{bmatrix}i&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&i\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\rangle$$

~~($\star$) [illegible] la máxima cantidad de elementos l.i. que~~

($\star$) Generan un espacio de dim. 8 contenido en $\mathbb{C}^{2\times 2}$ y sabemos que

$W' \subseteq W \wedge \dim(W')=\dim(W) \Rightarrow W'=W$.

Punto b) en la carilla siguiente

b) No, porque no cumple que

$\forall\, A \in S,\ \lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda A \in S.$

Veamos un caso para el que no vale:

$A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix},\ \bar{A}^t = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \Rightarrow A \in S.$

Pero $i \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ e $\overline{(iA)}^t = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow iA \notin S.$

$\therefore\ \exists\, \lambda \in \mathbb{C},\ A \in S \,/\, iA \notin S \Rightarrow$ S no es un $\mathbb{C}$-e.v.

PARCIAL - HOJA 4

2) $\varphi_1(x,y,z) = x-y+z$, $\varphi_2(x,y,z) = y-z$, $\varphi_3(x,y,z) = x-y$

a) $B_1 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$, B base de $\mathbb{R}^3$ / $B^* = B_1$:

Si $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, B^* es la única base de $(\mathbb{R}^3)^*$ tal que
$= \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$

$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$.

Además, para cada base B' de $(\mathbb{R}^3)^*$, hay una ÚNICA base $\tilde{B}$ de $\mathbb{R}^3$ / $\tilde{B}^* = B'$.

Dicho esto, quiero que

$v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$

~~$\varphi_1(v_1) = x_1 - y_1 + z_1 = 1$ $\varphi_1(v_2) = y_1 - z_1 = 0$~~

$\varphi_1(v_1) = x_1 - y_1 + z_1 = 1$ $\quad \varphi_1(v_2) = x_2 - y_2 + z_2 = 0$ $\quad \varphi_1(v_3) = x_3 - y_3 + z_3 = 0$

$\varphi_2(v_1) = y_1 - z_1 = 0$ $\quad \varphi_2(v_2) = y_2 - z_2 = 1$ $\quad \varphi_2(v_3) = y_3 - z_3 = 0$

$\varphi_3(v_1) = x_1 - y_1 = 0$ $\quad \varphi_3(v_2) = x_2 - y_2 = 0$ $\quad \varphi_3(v_3) = x_3 - y_3 = 1$

Resuelvo en simultáneo:

$$\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_1 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_3 \to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] F_1 + F_2 + F_3 \to F_1$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \quad 2 \quad 3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1, z_1) = (1,1,1) \\ (x_2, y_2, z_2) = (1,1,0) \\ (x_3, y_3, z_3) = (0,-1,-1) \end{cases}$$

$\therefore B = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,-1,-1)\}$

(Se ve fácilmente que verifican las ecuaciones de las φ_i).

Continúa en la carilla siguiente

b) $\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + 2z = 0\}$, base de $\mathbb{W}^\circ$

Observemos que la expresión misma de $\mathbb{W}$ nos está dando una base de $\mathbb{W}^\circ$, ya que si tomamos la función

$\varphi(x, y, z) = 3x - y + 2z$

tenemos que $\mathbb{W} = \{w \in \mathbb{R}^3 : \varphi(w) = 0\}$.

[illegible]

Sabemos que $\varphi(w) = 0 \ \forall w \in \mathbb{W}$, pero para ver que $\mathbb{W}^*$ es exactamente $\langle \varphi \rangle$ (es decir, nada más en $(\mathbb{R}^3)^*$ anula a $\mathbb{W}$) usamos que

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathbb{W}) + \dim(\mathbb{W}^\circ)$ para cualquier $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^3$

- $\dim(\langle \varphi \rangle) = 1$.
- $\dim(\mathbb{W})$: Busco generadores l.i. y armo una base

$w \in \mathbb{W} \iff 3x - y + 2z = 0 \iff y = 3x + 2z \iff w = (x, 3x + 2z, z) \iff$

$\iff w = x(1, 3, 0) + z(0, 2, 1) \iff w \in \langle (1, 3, 0), (0, 2, 1) \rangle$

$(1, 3, 0)$ y $(0, 2, 1)$ forman un cjto. l.i. porque ninguno es múltiplo del otro.

$\therefore \{(1, 3, 0), (0, 2, 1)\}$ es base de $\mathbb{W}$ (es l.i. y genera $\mathbb{W}$)

$\Rightarrow \dim(\mathbb{W}) = 2 \Rightarrow \dim(\mathbb{W}^\circ) = 1$

[illegible]

- $\forall \varphi \in \langle \varphi \rangle : \forall w \in \mathbb{W} : \varphi(w) = 0 \Rightarrow \langle \varphi \rangle \subseteq \mathbb{W}^\circ$.
- $\dim(\langle \varphi \rangle) = \dim(\mathbb{W}^\circ) \wedge \langle \varphi \rangle \subseteq \mathbb{W}^\circ \Rightarrow \langle \varphi \rangle = \mathbb{W}^\circ$.

Ahora busco $[\varphi]_{B^*}$

~~Recordemos que $[\varphi]_{B^*} = ([\varphi]_B)^t$ y $[\varphi]_B = [\,[\varphi(v_1)]_B \mid [\varphi(v_2)]_B \mid [\varphi(v_3)]_B\,]$~~

~~Recordemos que las bases duales cumplen que~~

~~Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de un e.v.~~

Continúa en la hoja siguiente

PARCIAL - HOJA 5

Recordemos que dado un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{V}$ y unas bases R de $\mathbb{V}$ y R^* de $\mathbb{V}^*$ (R^* dual de R), ~~tenemos que~~

~~[illegible]~~ $R = \{v_1, \dots, v_n\}$, $R^* = \{\varphi_1, \dots \varphi_n\}$, vale que

$\forall v \in \mathbb{V}: (v)_R = (\varphi_1(v), \dots, \varphi_n(v))$

$\forall \varphi \in \mathbb{V}^*: (\varphi)_{R^*} = (\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_n))$.

Entonces, si buscamos $(\varphi)_{B^*}$:

$(\varphi)_{B^*} = (\varphi(1,1,1), \varphi(1,1,0), \varphi(0,-1,-1)) = (3-1+2, 3-1, 1-2)$

$\therefore (\varphi)_{B^*} = (\cancel{0}, 2, -1)$

6

4

3) a) $Nu(f) = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : f(P) = 0\}$.

Tenemos f definida sobre la base $\{1, X, X^2, X^3\}$.

$P \in \mathbb{R}_3[X] \Rightarrow P(X) = a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2 + d X^3$

$f(P) = 0 \iff f(a \cdot 1 + b \cdot X + c \cdot X^2 + d X^3) = 0 \iff$ → f es una t.l. $\Rightarrow f(av + bw) = af(v) + bf(w)$

$\iff a \cdot f(1) + b \cdot f(X) + c \cdot f(X^2) + d \cdot f(X^3) = 0$

$\iff a(1,1,0,1) + b(0,-1,1,-1) + c(0,1,0,5) + d(0,-1,0,-5) = (0,0,0,0)$

$\iff$ ~~$a + c = 0$, $a - b + c - d = 0$, $b = 0$, $a + b + 5c + 5d = 0$~~

$$\begin{cases} a = 0 \\ a - b + c - d = 0 \\ b = 0 \\ a + b + 5c - 5d = 0 \end{cases}$$

$a = b = 0$ (de las ec.) $\Rightarrow c - d = 0 \Rightarrow c = d$

$\Rightarrow 5c - 5d = 0 \Rightarrow c = d$

$\therefore P \in Nu(f) \iff P = c \cdot X^2 + c \cdot X^3 \iff P = c \cdot (X^2 + X^3)$

$\therefore Nu(f) = \langle X^2 + X^3 \rangle$

Una base de $Nu(f)$ es $\{X^2 + X^3\}$ (es base porque tiene un único elemento no nulo)

$\Rightarrow \dim(Nu(f)) = 1$

Recordemos el teorema de la dimensión: para toda t.l. $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, vale que

$\dim(Nu(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(\mathbb{V})$

Continúa en la carilla siguiente

$\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, $\dim(Nu(f)) = 1$

$\dim(Im(f)) + 1 = 4 \Rightarrow \dim(Im(f)) = 3$

Recordemos además que siempre vale

$Im(T) = \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$

donde $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

Entonces, para ~~...~~ dar una base de $Im(f)$, buscamos tres elementos l.i. ~~...~~ entre las imágenes de $1, x, x^2$ y x^3 (como $\dim(Im(f)) = 3$, sabemos que si son 3 y son l.i. entonces son base)

• $(0,-1,0,-5)$ es $(-1)\cdot(0,1,0,5)$ así que lo descarto

Veamos que $\{(1,1,0,1), (0,-1,1,1), (0,1,0,5)\}$ es ~~...~~ un cjto. l.i.:

$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-1,1,1) + \gamma(0,1,0,5) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha + \beta + 5\gamma = 0 \end{cases} \overset{\alpha=\beta=0}{\Rightarrow} \gamma = 0 \qquad \alpha = \beta = \gamma = 0 \Rightarrow \text{el conjunto es l.i.}$$

$\therefore \{(1,1,0,1), (0,-1,1,1), (0,1,0,5)\}$ es una base de $Im(f)$.

b) Busco $B = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$, $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tales que

$$\left[(f(P_1))_{B'} \mid (f(P_2))_{B'} \mid (f(P_3))_{B'} \mid (f(P_4))_{B'} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ es decir}$$

$f(P_1) = v_1$
$f(P_2) = 2v_2$
$f(P_3) = -v_3$
$f(P_4) = 0$

Observemos que es posible encontrar estas bases, ya que $rg(M)$ se define como $\dim(Im(g))$ donde M es la matriz de la t.l. g. Como el rango corresponde también a la cantidad de filas l.i. de M (en este caso se ve fácilmente que son 3 y $\dim(Im(f)) = 3$) y no varía según las bases, el problema tiene solución.

Continúa en la hoja siguiente

PARCIAL - HOJA 6

~~[illegible]~~

b) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^2+X^3\}$ (es base de $\mathbb{R}_3[X]$ porque tiene un polinomio de cada grado desde 0 hasta 3)

$f(1) = (1,1,0,1) \Rightarrow v_1 = (1,1,0,1)$

$f(X) = (0,-1,1,-1) \Rightarrow 2v_2 = (0,-1,1,-1) \Rightarrow v_2 = (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$f(X^2) = (0,1,0,5) \overset{=-v_3}{\Rightarrow} v_3 = (0,-1,0,-5)$

$f(X^2+X^3) \underset{f \text{ t.l.}}{=} f(X^2) + f(X^3) = (0,1,0,5) + (0,-1,0,-5) = (0,0,0,0)$

$\therefore\ \mathcal{B}' = \{\underbrace{(1,1,0,1),\ (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (0,-1,0,-5)}_{\text{Conjunto l.i.}},\ v_4\}$ cumple

Conjunto l.i. ~~[illegible]~~ $\rightarrow$ se ve fácilmente que son l.i.

Como cualquier conjunto l.i. puede extenderse a una base, busco algún v_4 l.i. con esos tres.

$\mathcal{B}' = \{(1,1,0,1), (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}), (0,-1,0,-5), (0,0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^4$

Pruebo que son l.i.:

$\alpha(1,1,0,1) + \beta(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) + \gamma(0,-1,0,-5) + \delta(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & \rightarrow \alpha=\beta=0 \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta - \gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = 0 \\ \frac{1}{2}\beta = 0 & \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha - \frac{1}{2}\beta - 5\gamma + \delta = 0 & \Rightarrow \delta = 0 \end{cases} \qquad \therefore\ \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

$\Downarrow$

$\alpha=\beta=\gamma=0$

c) Veamos el rango de esta matriz; ~~que corresponde al número de filas l.i.~~:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ F_3 - 2F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3F_3 - F_2 \to F_3 \\ F_4 - F_2 \to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como el rango no varía por las operaciones elementales, queda ver que esas tres filas no nulas son l.i. (la que quedó nula era c.l. de las otras):

• $\alpha(1,-1,1,-1)+\beta(0,3,0,1)+\gamma(0,0,0,2)=(0,0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \Rightarrow \alpha=0 \\ -\alpha+3\beta = 0 \Rightarrow \beta=0 \\ \beta+2\gamma=0 \Rightarrow \gamma=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \beta=0 \qquad \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0 \Rightarrow \text{son l.i.}$$

∴ Por lo explicado anteriormente, existen B_1 y B_2 que cumplen lo pedido.

4) a) Observemos que $S=\mathbb{R}_2[X]$.

Tomamos la base canónica $\{1, X, X^2\}$ y le aplicamos Gram-Schmidt: $\tilde{B}=\{\tilde{v}_1,\tilde{v}_2,\tilde{v}_3\}$ ortogonal, $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ ortonormal.

• $\tilde{v}_1=1$

• $\tilde{v}_2 = X-\dfrac{\langle X,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1$

• $\langle X,1\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} X\,dX = \frac{X^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad\Rightarrow \tilde{v}_2=X.$

• $\tilde{v}_3 = X^2-\dfrac{\langle X^2,1\rangle}{\|1\|^2}\cdot 1-\dfrac{\langle X^2,X\rangle}{\|X\|^2}\cdot X$

• $\langle X^2,1\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} X^2\,dX=\frac{X^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

• $\|1\|^2=\langle 1,1\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\,dx = x\Big|_{-1}^{1}=2$

• $\langle X^2,X\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1} X^3\,dX=\frac{X^4}{4}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$

∴ $\tilde{v}_3 = X^2-\dfrac{2/3\cdot 1}{2} = X^2-1/3$

∴ $\tilde{B}=\{1, X, X^2-1/3\}$ Normalizo: $\left(B=\left\{\dfrac{\tilde{v}_1}{\|\tilde{v}_1\|},\dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|},\dfrac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|}\right\}\text{ BON}\right)$

• $\|1\|=\sqrt{\|1\|^2}=\sqrt{2}$

• $\|X\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1} X^2\,dX=2/3 \Rightarrow \|X\|=\sqrt{2}/\sqrt{3}.$

• $\|X^2-1/3\|^2=\displaystyle\int_{-1}^{1}(X^2-1/3)^2\,dX=\int_{-1}^{1} X^4-2/3X^2+1/9\,dX=\frac{X^5}{5}-\frac{2X^3}{9}+\frac{X}{9}\Big|_{-1}^{1}=$

$=\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{9}-\left(-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{1}{9}\right)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{2}{9}=\dfrac{18-10}{45}=8/45$

Continúa en la hoja siguiente

PARCIAL - HOJA 7

$\therefore B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{X}{\left(\sqrt{2}/\sqrt{3}\right)}, \frac{X^2 - 1/3}{\sqrt{8/45}} \right\}$

$B = \left\{ 1/\sqrt{2}, \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X, \sqrt{45/8}\, X^2 - 15/8 \right\}$ es BON de S.

b) El polinomio de grado menor o igual a 2 más cercano a q es la proyección ortogonal de q en $\mathbb{R}_2[X]$, $p_S(q)$.

Recordemos que si $R = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una BON de $(V, \langle , \rangle)$, vale que $\forall v \in V$:

$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_n \rangle v_n$.

Además, si tenemos dos espacios W y $W^\perp$ (su compl. ortogonal), vale $V = W \oplus W^\perp$ y la proyección ortogonal de v en w es $w \in W \,/\, v = w + w'$, con $w' \in W^\perp$ ($\exists$ y son únicos porque $V = W \oplus W^\perp$)

Si escribimos a $\mathbb{R}[X]$ como $S \oplus S^\perp$, tenemos que

$v = \left\langle v, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle v, \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X \right\rangle \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X + \left\langle v, 45/8\, X^2 - 15/8 \right\rangle X^2 + t \in S^\perp$

(porque una base de S puede extenderse a una de $\mathbb{R}[X]$ y en particular vale para una BON)

Entonces, para buscar ~~p(...), alcanza con~~ $p_S(X^7 - X)$, alcanza con calcular

$\left\langle X^7 - X, 1/\sqrt{2} \right\rangle 1/\sqrt{2} + \left\langle X^7 - X, \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X \right\rangle \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X + \left\langle X^7 - X, 45/8\, X^2 - 15/8 \right\rangle X^2$

- $\left\langle X^7 - X, 1/\sqrt{2} \right\rangle : \int_{-1}^{1} (X^7 - X) 1/\sqrt{2}\, dX = 1/\sqrt{2} \left(\int_{-1}^{1} X^7 dX - \int_{-1}^{1} X\, dX \right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X^8}{8}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{X^2}{2} \Big|_{-1}^{1} \right) \right) = 1/\sqrt{2} \left(1 - 1 - (1 - 1) \right) = 0.$

- $\left\langle X^7 - X, \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X \right\rangle : \int_{-1}^{1} (X^7 - X) \sqrt{3}/\sqrt{2}\, X\, dX = \sqrt{3}/\sqrt{2} \left(\int_{-1}^{1} X^8 dX - \int_{-1}^{1} X^2 dX \right) =$

$= \sqrt{3}/\sqrt{2} \left(\frac{X^9}{9}\Big|_{-1}^{1} - \left(\frac{X^3}{3} \Big|_{-1}^{1} \right) \right) = \sqrt{3}/\sqrt{2} \left(\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \right) = \sqrt{3}/\sqrt{2} \left(\frac{2}{9} - \frac{6}{9} \right)$

$= \sqrt{3}/\sqrt{2} \cdot (-4/9) = \frac{-4\sqrt{3}}{9\sqrt{2}}$.

$\circ \langle X^7 - X, \ ^{45}/_8 X^2 - ^{15}/_8 \rangle : \int_{-1}^{1} (X^7 - X)(^{45}/_8 X^2 - ^{15}/_8)\, dX =$

$= \int_{1}^{-1} ^{45}/_8 X^9 - ^{15}/_8 X^7 - ^{45}/_8 X^3 + ^{15}/_8 X \, dX = 0$ porque son funciones impares en un intervalo simétrico

$\therefore \ p_S(X^7 - X) = -\dfrac{4\sqrt{3}}{9\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot X = -^{12}/_{18} X$

$\Rightarrow p_S(X^7 - X) = -^2/_3 X$.

c) La distancia de q a $S^\perp$, por definición de distancia, es la norma de su proyección ortogonal sobre S inducida por el P.I.:

$d(q, S^\perp) = \| p_S(q) \| = \langle p_S(q), p_S(q) \rangle^{1/2} = \left(\int_{-1}^{1} (-^2/_3 X)^2 \, dX \right)^{1/2} =$

$= \left(\int_{-1}^{1} ^4/_9 X^2 \, dX \right)^{1/2} = \left(^4/_{27} X^3 \Big|_{-1}^{1} \right)^{1/2} = (^8/_{27})^{1/2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$\therefore \ d(q, S^\perp) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.